# Estimación de parámetros

Resuelva los Ejercicios: 8.1 hasta 8.8 del texto

1º) Considere una variable X con distribución normal de media "$\mu$" conocida, y varianza "$\sigma^2$" desconocida.
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ , una muestra aleatoria proveniente de "X".
a) Obtenga el estimador máximo verosímil de "$\sigma^2$".
b) Analice si este estimador es insesgado.
c) ¿Cuál estimador es mejor para "$\sigma^2$", el máximo verosímil obtenido anteriormente ó $S^2$ ?

Solución : a) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\mu)^2}{n}$ ; b) es insesgado c) El anterior es mejor

2º) Se tienen dos muestras independientes de tamaños $n_1$ y $n_2$, para una misma población normal de parámetros "$\mu$" y "$\sigma^2$", ambos desconocidos.
Suponga que $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ representan sus medias muestrales, mientras que $S_1^2$ y $S_2^2$ sus varianzas muestrales, respectivamente.
Se propone como estimador de "$\mu$" a la media ponderada de las medias muestrales, es decir: $\hat{\mu} = \omega\,\overline{X}_1 + (1-\omega)\,\overline{X}_2$ ; donde "$\omega$" es el factor de ponderación.
a) Demuestre que para cualquier valor de "$\omega$" , este estimador es insesgado.
b) ¿Cuál es el mejor valor para "$\omega$"?
c) Para el caso $n_1 = 6$ , $n_2 = 10$ , y usando el mejor valor de "$\omega$"¿Cuál es la probabilidad de cometer un error mayor que $\frac{1}{8}\sigma$ en la estimación de "$\mu$"?.
d) Demuestre que : $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ es un estimador insesgado para $\sigma^2$
.

Solución: b) $\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$

3º) Una variable aleatoria continua "X" que siga la distribución gamma, tiene por función de densidad: $f(x) = \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$ ; $x > 0$ , donde "$\lambda$" y "r" son ambos parámetros positivos.
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ , una muestra aleatoria proveniente de "X".
a) Aplique el método de máxima verosimilitud y el método de momentos, suponiendo que "r" es conocido, para obtener el estimador de "$\lambda$".
b) Para el caso en que ambos parámetros son desconocidos, aplique de nuevo estos mismos dos métodos para obtener sus estimadores.

a) $\hat{\lambda} = \dfrac{r}{\overline{X}}$ por ambos métodos ; b) $\hat{\lambda} = \dfrac{n\,\overline{X}}{(n-1)\,S^2}$ ; $\hat{r} = \dfrac{n\,\overline{X}^2}{(n-1)\,S^2}$ ; por momentos

4°) El estimador máximo verosímil para $\sigma^2$ en una normal , cuando también se desconoce "$\mu$" es: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \overline{X})^2}{n}$

a) Encuentre el sesgo de este estimador.
b) Demuestre que es consistente en media cuadrática.

Solución : a) $-\dfrac{\sigma^2}{n}$

5º) Considere una variable aleatoria "X" ,con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = (\theta - 1)\, x^{\theta-2} \; ; \quad 0 < x < 1 .$$

y una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proveniente de "X".
a) ¿ Es $\hat{\theta} = 1 - \overline{X}$ , un estimador insesgado para el parámetro "$\theta$"?
b) Obtenga el estimador de $\theta$ por el método de momentos .
c) Obtenga el estimador de $\theta$ por el método de máxima verosimilitud.

6º) Si $X_1, X_2, \ldots, X_6$, es una muestra aleatoria de una variable normal de media "$\mu$", y varianza $\sigma^2$, ambos desconocidos.
a) Determinar la constante "C" de forma que:

$$\hat{\sigma}^2 = C\,[\,(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\,]$$

sea un estimador insesgado de $\sigma^2$.
b) ¿Cuál es mejor, ese estimador ó $S^2$ ?

Solución : a) C = $\dfrac{1}{6}$ . b) Es mejor $S^2$

7°) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ , una muestra aleatoria proveniente de una variable aleatoria "X", con función de densidad: $f(x) = \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2}$ ; $0 < x < \theta$

Considere los estimadores de la forma : $\hat{\theta} = C\,\overline{X}$ donde "C" es una constante.
¿Para qué valor de "C" el estimador es insesgado ?
Solución : C = 3 .